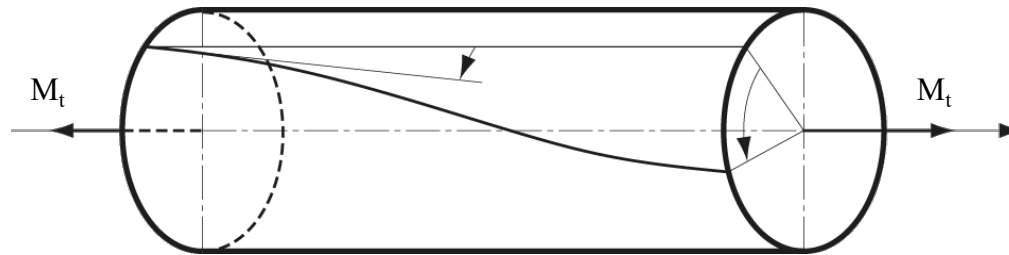


# Mécanique des structures



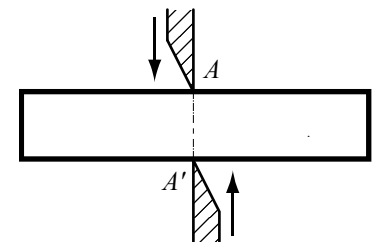
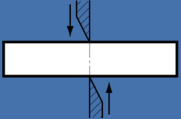
## Chapitre 5 : Torsion simple

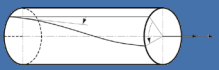
Pr. Shea & Dr Prenleloup  
SGM BA3 2025-2026

**EPFL**

# Chapitre 4 : Cisaillement simple

Rappel





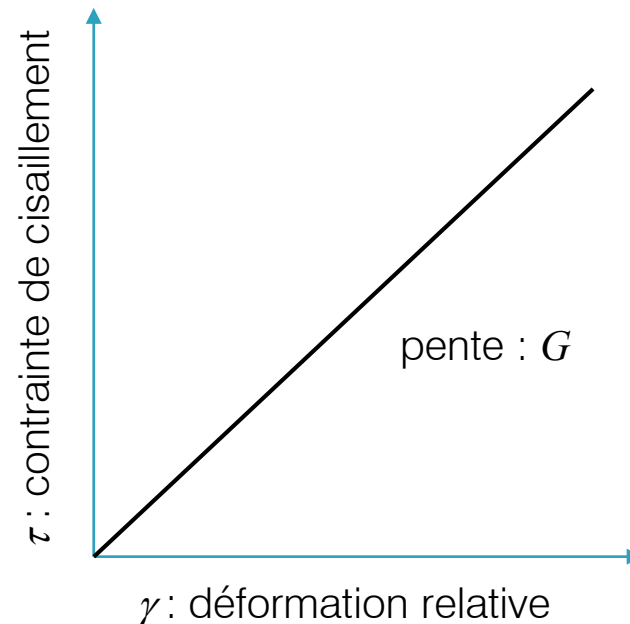
# Chapitre 5 : Torsion simple

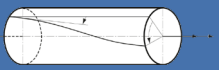
## Introduction

La torsion ne cause **pas de tension ou compression** dans le matériau: elle génère des contraintes de cisaillement pures sur chaque plan de section transversal.

Le résultat de la contrainte de cisaillement en torsion sur n'importe quel plan de section transversale est un **couple interne**.

Les contraintes de cisaillement,  $\tau$ , sont proportionnelles aux déformations relatives,  $\gamma$ , avec une constante de proportionnalité,  $G$ , le module de cisaillement





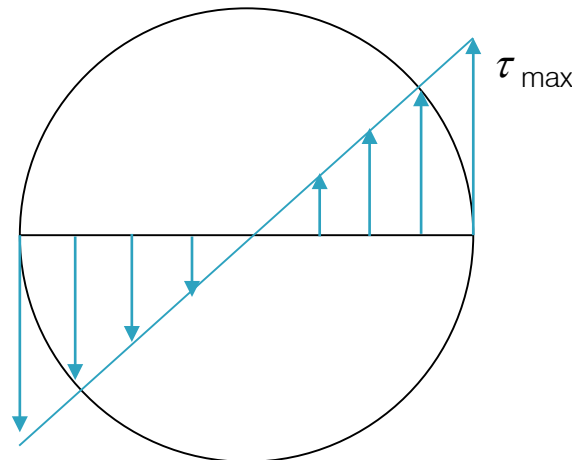
# Chapitre 5 : Torsion simple

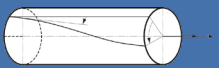
## *Introduction*

Une section plane perpendiculaire à l'axe de torsion reste plane suite à l'application du couple (**pas de distorsion**)

Sur une section transversale, toutes les lignes radiales effectuent une rotation avec un angle égal lors de la déformation

La déformation relative de cisaillement  $\gamma(r)$  et la contrainte de cisaillement  $\tau(r)$  varient linéairement, de 0 à  $r = 0$ , de 0 à  $\tau_{\max}$ , respectivement, sur le bord extérieur de la section





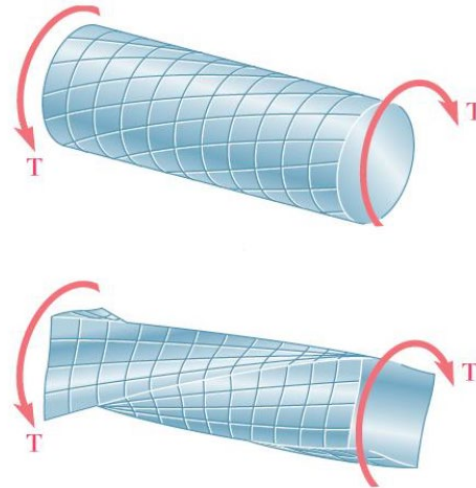
# Chapitre 5 : Torsion simple

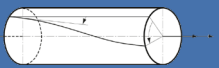
## Introduction

Les **sections planes restent planes** en torsion seulement pour les corps avec une symétrie axiale infinie (comme les barres circulaires et les tubes).

Dans une barre avec une section carré / rectangulaire, il n'y a pas de telle symétrie et les sections transversales vont se déformer.

Il est faux d'assumer que la contrainte de cisaillement dans une barre rectangulaire varie linéairement avec la distance, la contrainte est en fait zéro dans les coins et non maximum.





# Chapitre 5 : Torsion simple

## Démarche et applications

(A) Introduction des notions générales et des hypothèses

(B) Identification des efforts non-nuls

(C) Expression des contraintes normale et tangentiel résultantes

(D) Analyse de l'état de contrainte

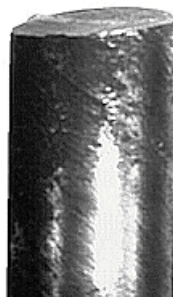
(E) Énergie de déformation (force & déplacement)

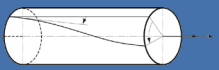


Tensile Failure  
in Torsion



Shear Failure  
in Torsion





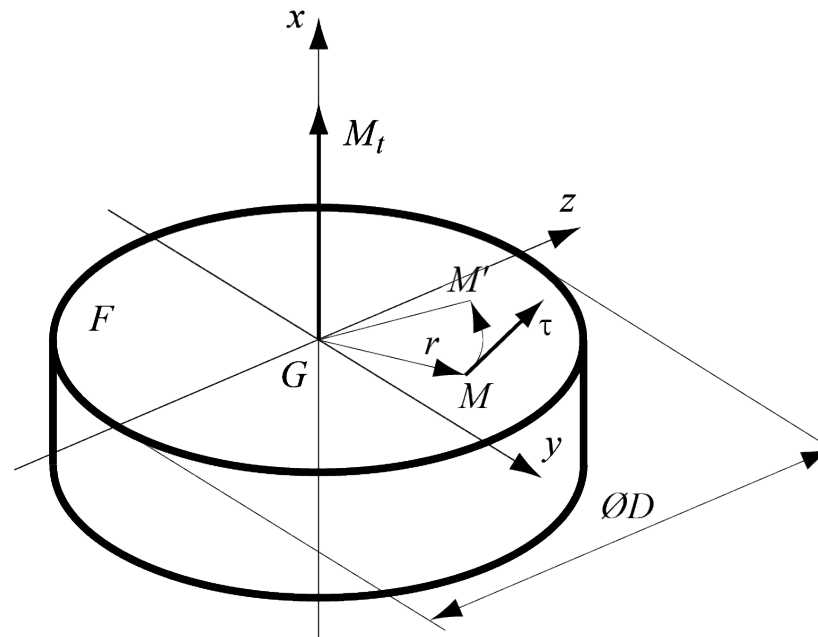
# Chapitre 5 : Torsion simple

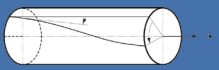
## Contrainte de cisaillement en torsion simple

La section normale  $F$  d'un solide travaille à la *torsion simple* quand le torseur des efforts intérieurs se réduit au *moment de torsion*  $M_t$  perpendiculaire à  $F$ .

Le calcul des contraintes et des déformations n'est facile que si la section est dite circulaire.

Pour des barres circulaires en torsion, l'expérience montre que l'on peut admettre qu'une section  $F'$  après déformation se déduit de la section originelle  $F$  par simple rotation dans le sens du moment de torsion  $M_t$  (hypothèse de Bernoulli)





# Chapitre 5 : Torsion simple

## Contrainte de cisaillement en torsion simple

En torsion, les équations d'équilibre sont toutes nulles, sauf la quatrième

$$(a) \quad N = \iint_F \sigma \, dF = 0$$

$$(b) \quad T_y = \iint_F \tau_y \, dF = 0$$

$$(c) \quad T_z = \iint_F \tau_z \, dF = 0$$

$$(d) \quad M_t = \iint_F \tau_z y - \tau_y z \, dF$$

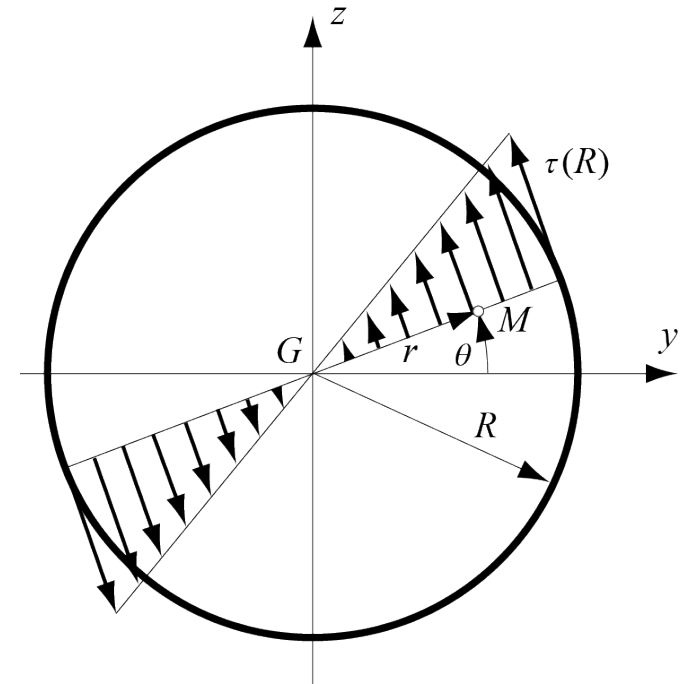
$$(e) \quad M_{fy} = \iint_F \sigma z \, dF = 0$$

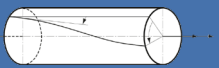
$$(f) \quad M_{fz} = -\iint_F \sigma y \, dF = 0$$

Comme la section  $F'$  reste dans le plan de  $F$ , la contrainte normale  $\sigma$  est nécessairement nulle en tout point, de sorte que les équations (a), (e) et (f) sont satisfaites

Un point  $M$  de  $F$  se déplace sur le cercle de rayon  $r$  passant par ce point; la contrainte tangentielle  $\tau$  doit donc être proportionnelle à  $r$  et perpendiculaire à  $GM$

- $\tau = k r$





## Contrainte de cisaillement en torsion simple

L'introduction des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  permet d'écrire

- $y = r \cos \theta \rightarrow \tau_y = -\tau \sin \theta = -k r \sin \theta$
- $z = r \sin \theta \rightarrow \tau_z = \tau \cos \theta = k r \cos \theta$

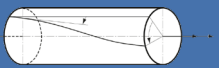
de sorte que les équations (b) et (c) ont pour expression, compte tenu de  $dF = r dr d\theta$

- $T_y = -k \iint_F r \sin \theta dF = -k \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$
- $T_z = k \iint_F r \cos \theta dF = k \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$

Elles sont identiquement nulles quelle que soit la valeur  $k$ , la distribution des  $\tau$  satisfaisant donc les conditions  $T_y = 0$  et  $T_z = 0$ .

La relation (d) va nous permettre de calculer la constante  $k$ , puisqu'en y insérant les composantes  $\tau_y$  et  $\tau_z$  et en utilisant les coordonnées polaires

- $M_t = k \iint_F r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dF = k \iint_F r^2 dF = k I_p$



## Contrainte de cisaillement en torsion simple

L'intégrale constitue le moment d'inertie polaire  $I_p$  de la section

- $I_p = \iint_F r^2 dF$

Ce qui permet de définir la constante  $k$  comme étant

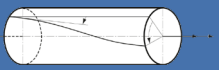
- $k = \frac{M_t}{I_p}$

Ce qui permet d'explicité la contrainte  $\tau$  sous la forme

- $\tau = k r = \frac{r M_t}{I_p}$

L'état de contrainte de la torsion circulaire est donc un *cisaillement pur*, mais la contrainte tangentielle  $\tau$  varie en intensité et direction. Sa valeur maximale apparaît sur la surface extérieure du barreau

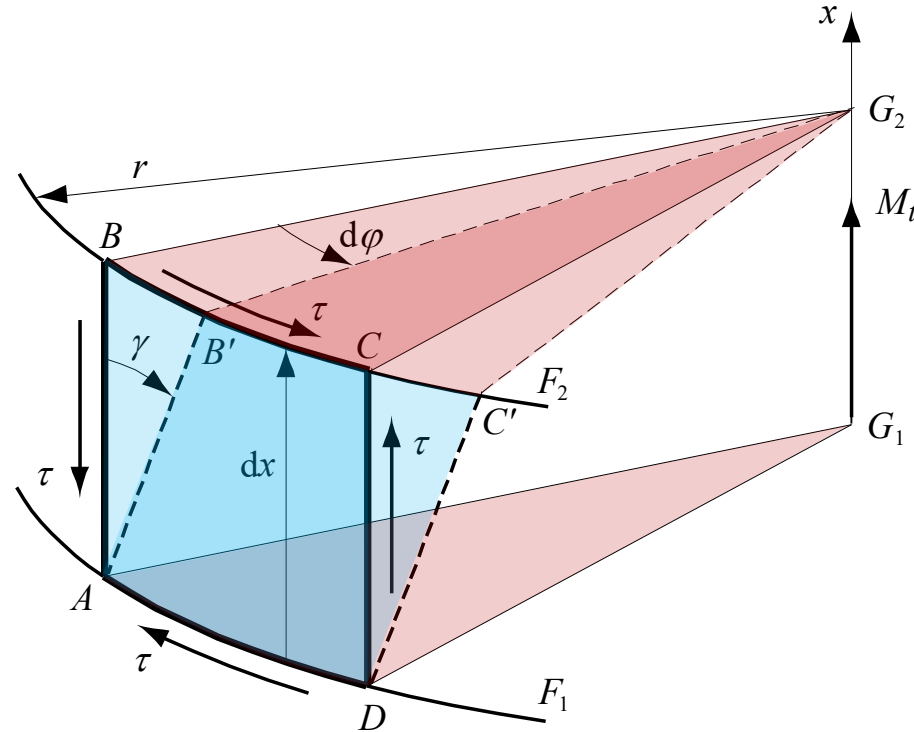
- $\tau_{max} = \tau(R) = \frac{R M_t}{I_p}$

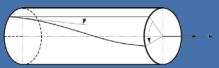


# Chapitre 5 : Torsion simple

## Déformation en torsion circulaire

Considérons un carré  $ABCD$  compris entre deux sections voisines  $F_1$  et  $F_2$ , distantes de  $dx$ . La section  $F_1$  étant supposée fixe, le carré se transforme en un losange  $AB'C'D$ , conformément aux résultats trouvés pour le cisaillement simple





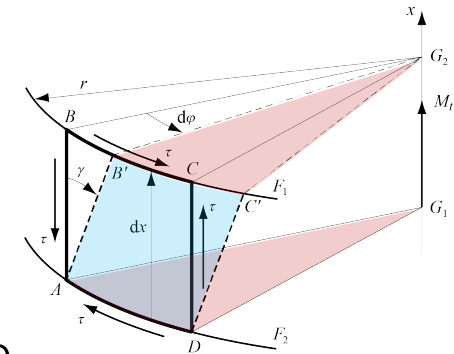
# Chapitre 5 : Torsion simple

## Déformation en torsion circulaire

Nommons  $d\varphi$  la rotation de  $F_2$  par rapport à  $F_1$  et  $\gamma$  l'*angle de glissement*.

L'arête  $BB'$  a pour valeur

- $BB' = \gamma \, dx = r \, d\varphi$



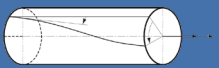
Où  $\varphi$  dénote la déformation angulaire, de sorte que l'on peut écrire

- $$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma}{r} = \frac{\tau}{r G} = \frac{M_t}{G I_p}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \tau = \frac{r M_t}{I_p}$$

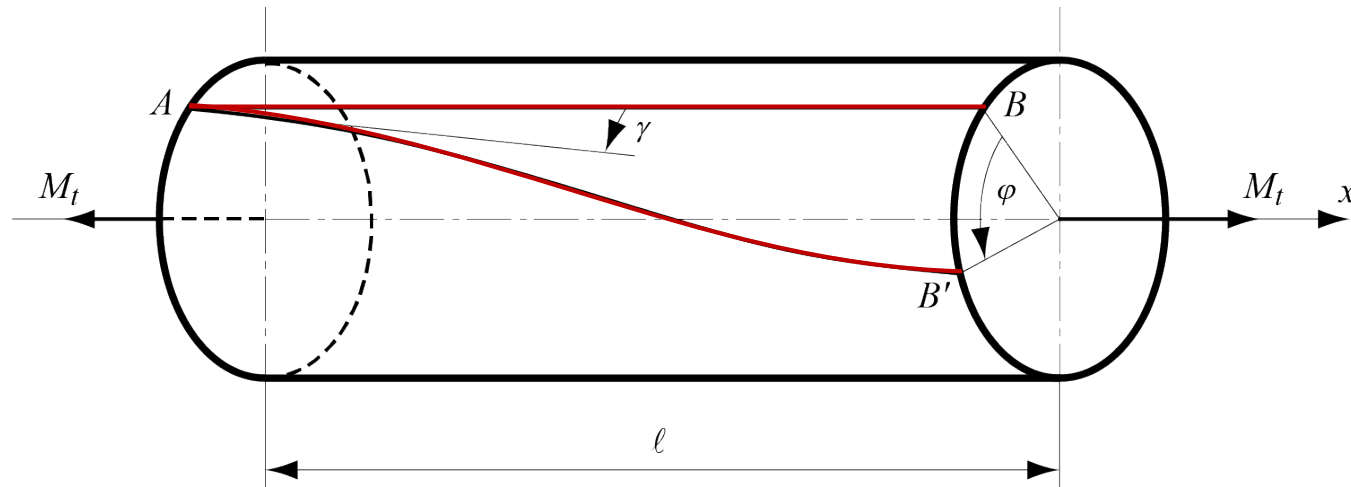
Si le moment de torsion est constant sur une longueur  $\ell$ , une génératrice  $AB$  du cylindre se transforme en une hélice  $AB'$  et l'intégration de la relation donne la déformation angulaire totale ou *angle de torsion*

- $$\varphi = \frac{M_t \ell}{G I_p}$$



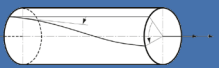
# Chapitre 5 : Torsion simple

## Déformation en torsion circulaire



Si le moment de torsion est constant sur une longueur  $\ell$ , une génératrice  $AB$  du cylindre se transforme en une hélice  $AB'$  et l'intégration de la relation donne la déformation angulaire totale ou *angle de torsion*

- $$\varphi = \frac{M_t \ell}{G I_p}$$



# Chapitre 5 : Torsion simple

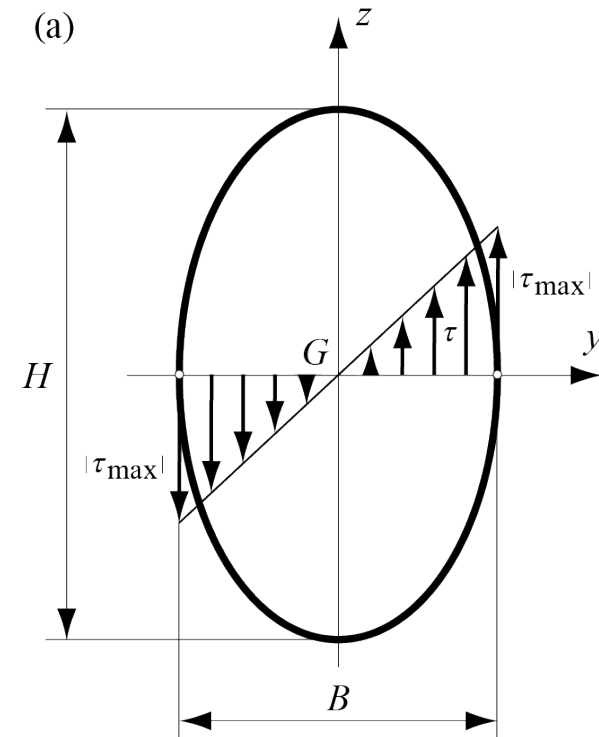
## Déformation en torsion non circulaire

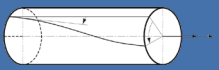
Alors que les sections des pièces circulaires soumises à la torsion restent planes, cette situation n'est plus vraie quand la section n'est pas circulaire.

Nous ne ferons pas de démonstrations rigoureuses dans le cadre de ce cours, mais nous contenterons de présenter quelques résultats intéressants qui découlent de méthodes plus générales de la théorie de l'élasticité.

### Section elliptique

- $\tau_{max} = \frac{16M_t}{\pi(HB^2)}$
- $\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{16M_t(H^2+B^2)}{\pi G (HB)^3}$





# Chapitre 5 : Torsion simple

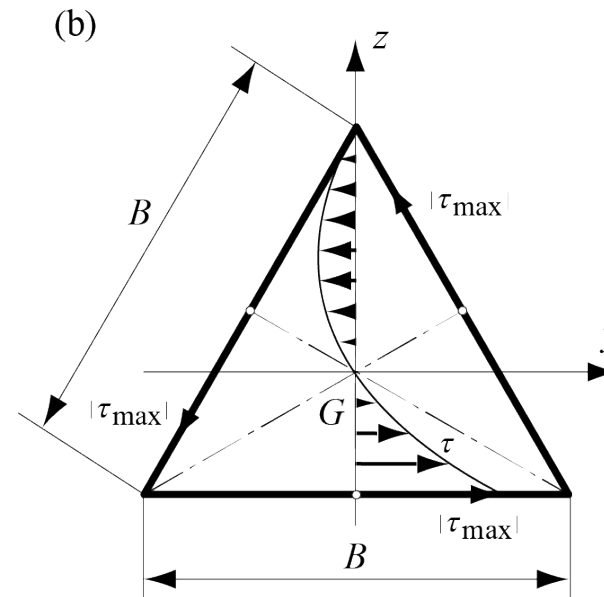
## Déformation en torsion non circulaire

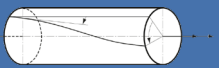
Alors que les sections des pièces circulaires soumises à la torsion restent planes, cette situation n'est plus vraie quand la section n'est pas circulaire.

Nous ne ferons pas de démonstrations rigoureuses dans le cadre de ce cours, mais nous contenterons de présenter quelques résultats intéressants qui découlent de méthodes plus générales de la théorie de l'élasticité.

### Section triangulaire

- $\tau_{max} = \frac{20 M_t}{B^3}$
- $\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{10 M_t}{6 G I_p}$

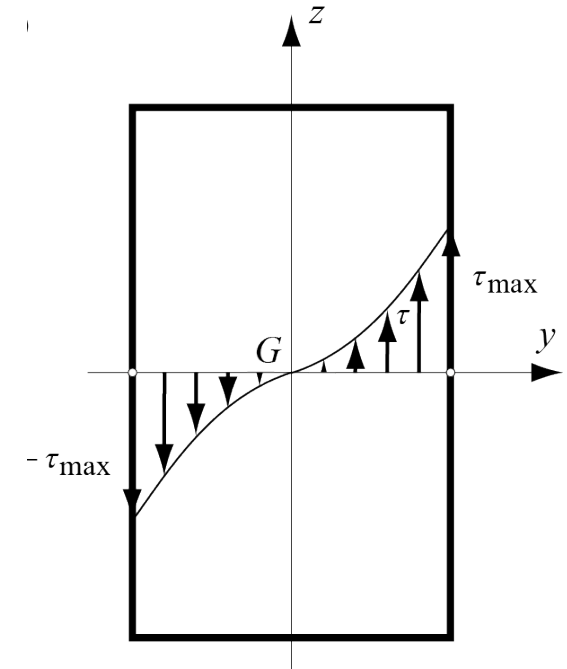
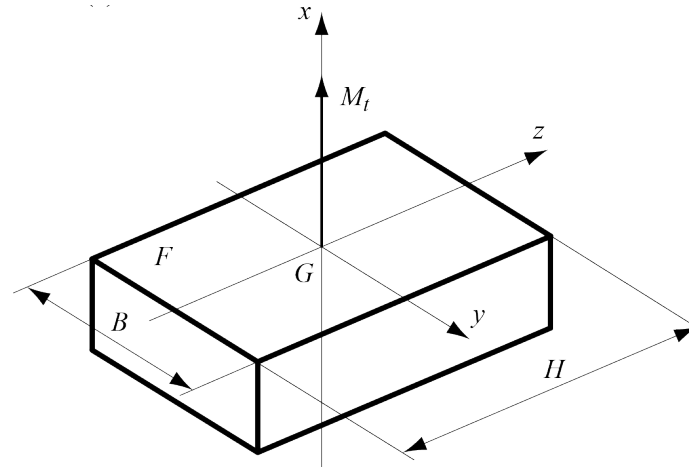




### Section rectangulaire

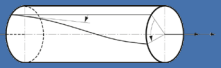
- $\tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha(HB^2)}$

- $\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{\beta G(HB^3)}$



où  $G$  dénote à nouveau le module de glissement et où  $\alpha$  et  $\beta$  constituent des coefficients qui sont fonctions du rapport  $H/B$

Rapport $H/B$	1	1,5	2	3	4	6	10	$\infty$
Facteur $\alpha$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,313	0,333
Facteur $\beta$	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,313	0,333

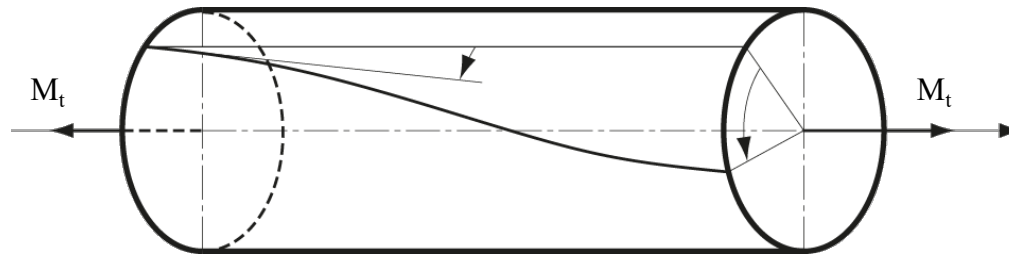


# Chapitre 5 : Torsion simple

## Problème 5.1

En choisissant une contrainte de cisaillement admissible  $\tau_{adm}$  de 50 MPa, calculer le diamètre – supposé uniforme – d'un arbre de turbine à gaz transmettant une puissance de 25 MW à 8000 t/min

# Mécanique des structures

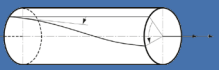


## Chapitre 5 : Torsion simple

Pr. Shea & Dr Preneloup  
SGM BA3 2025-2026

**EPFL**



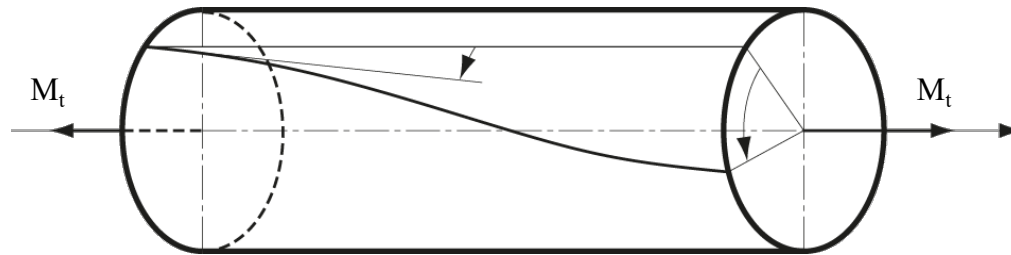


# Chapitre 5 : Torsion simple

## Problème 5.1

En choisissant une contrainte de cisaillement admissible  $\tau_{adm}$  de 50 MPa, calculer le diamètre – supposé uniforme – d'un arbre de turbine à gaz transmettant une puissance de 25 MW à 8000 t/min

# Mécanique des structures

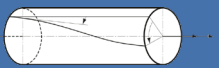


## Chapitre 5 : Torsion simple

Pr. Shea & Dr Prenleloup  
SGM BA3 2025-2026

**EPFL**





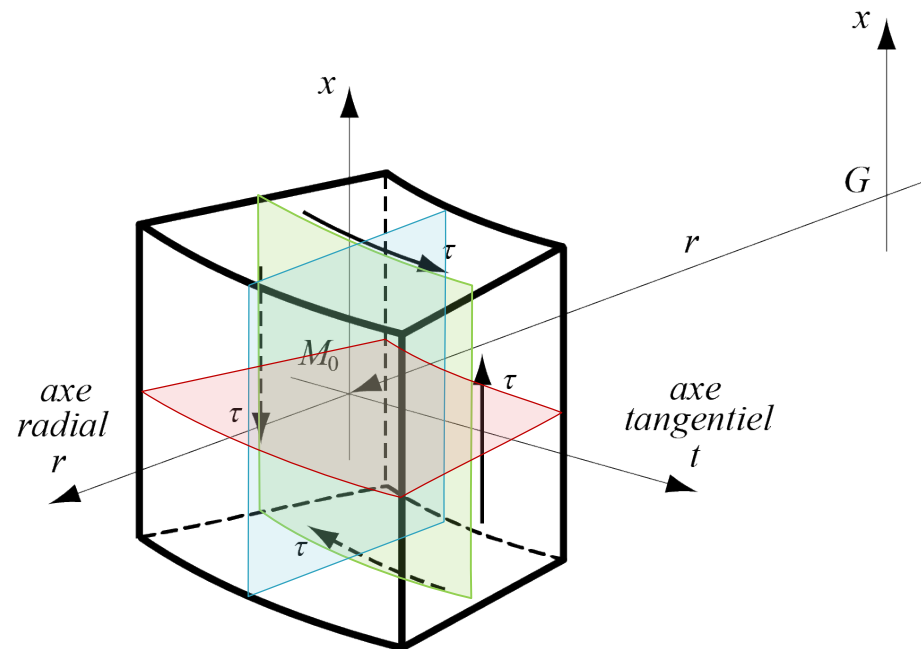
# Chapitre 5 : Torsion simple

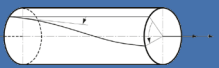
## Analyse de l'état de contrainte en torsion circulaire

Afin de déterminer l'état de contrainte en torsion circulaire, considérons un élément infinitésimal autour d'un point  $M_0$ , situé à une distance  $r$  de l'axe  $Gx$ .

Les contraintes normales sont nulles sur toutes les faces ( $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ ) et la contrainte tangentielle est nulle sur les faces perpendiculaires à l'axe radial  $M_0r$

Dès lors qu'une des contraintes principales est nulle, l'état de contrainte est bidimensionnel

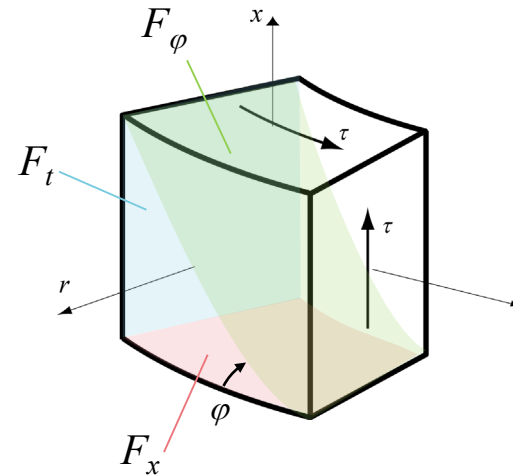
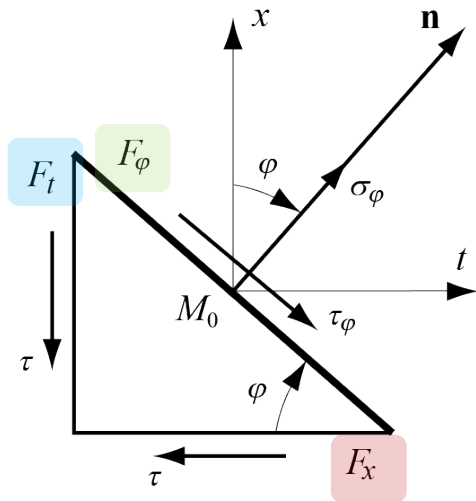




# Chapitre 5 : Torsion simple

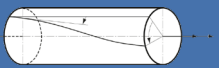
## Analyse de l'état de contrainte en torsion circulaire

Choisissons à nouveau une section oblique  $F_\varphi$  perpendiculaire au plan principal  $M_0xt$  et tournant autour de l'axe  $M_0r$ , sa normale  $\mathbf{n}$  formant un angle  $\varphi$  avec l'axe  $M_0x$



L'équilibre des forces selon la normale  $\mathbf{n}$  et la direction perpendiculaire entraîne

- $F_\varphi \sigma_\varphi - F_x \tau \sin \varphi - F_t \tau \cos \varphi = 0$
- $F_\varphi \tau_\varphi - F_x \tau \cos \varphi + F_t \tau \sin \varphi = 0$



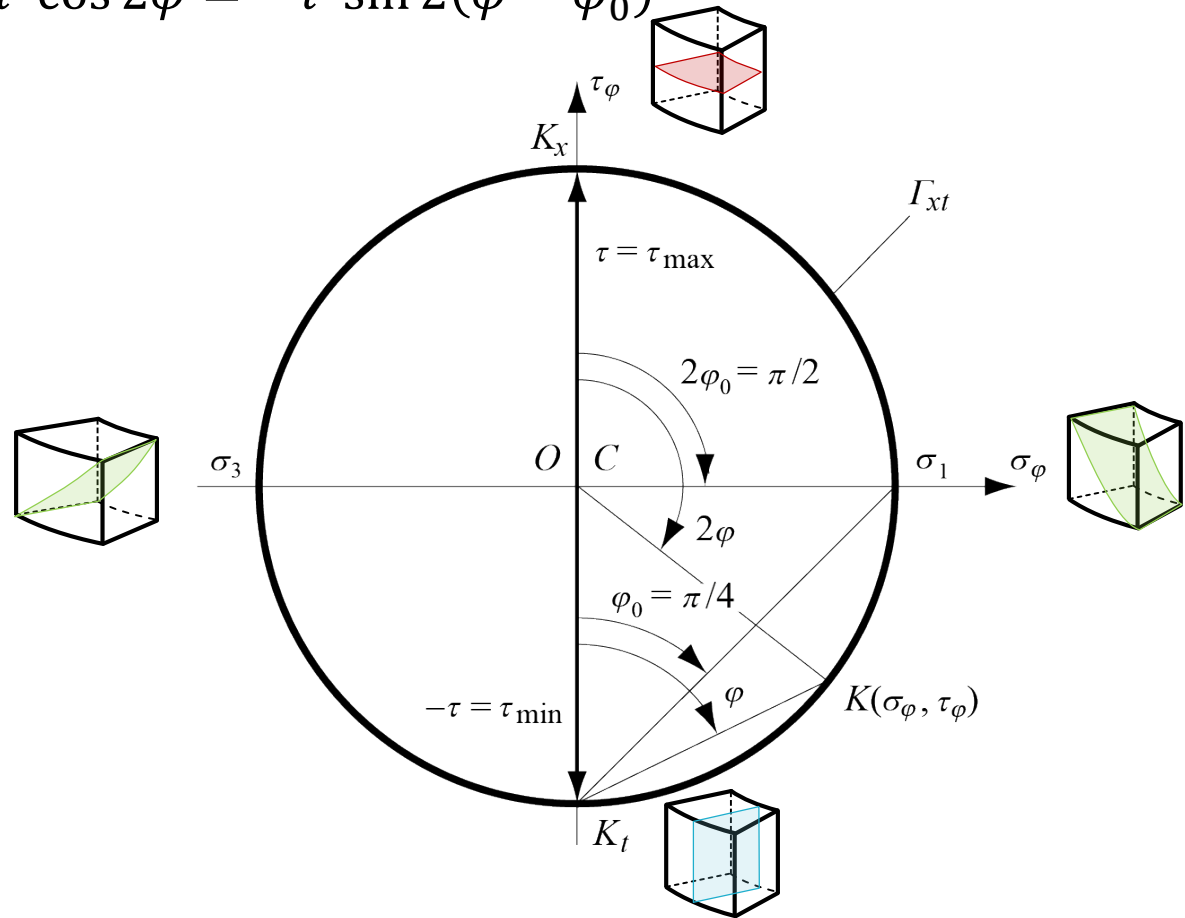
# Chapitre 5 : Torsion simple

## Analyse de l'état de contrainte en torsion circulaire

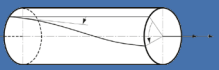
En vertu de la définition des faces  $F_x = F_\varphi \cos \varphi$  et  $F_t = F_\varphi \sin \varphi$ , les relations précédentes deviennent (le déphasage  $\varphi_0$  valant  $\pi/4$ )

- $\sigma_\varphi = 2\tau \sin \varphi \cos \varphi = \tau \sin 2\varphi = \tau \cos 2(\varphi - \varphi_0)$
- $\tau_\varphi = \tau(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \tau \cos 2\varphi = -\tau \sin 2(\varphi - \varphi_0)$

Cercle de Mohr fondamental  
 $\Gamma_{xt}$  en torsion circulaire



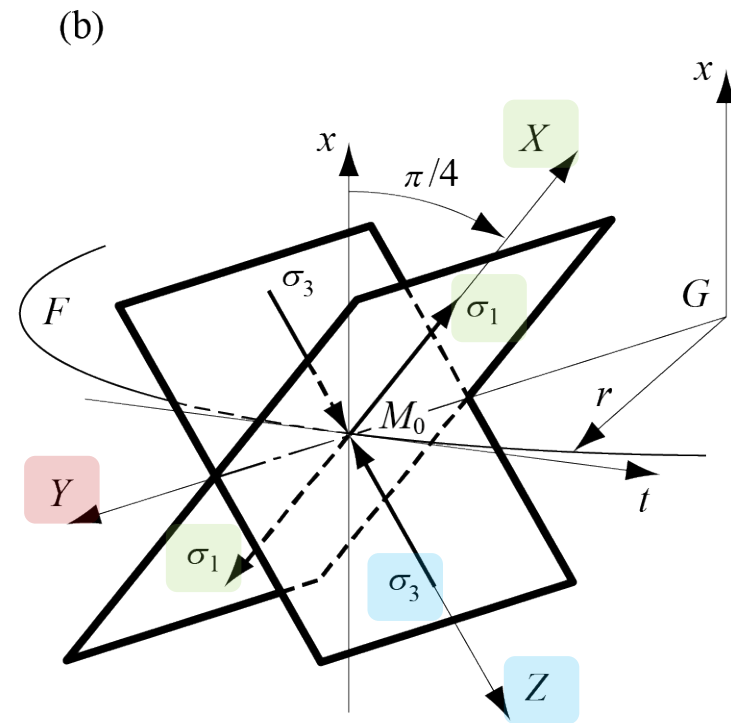
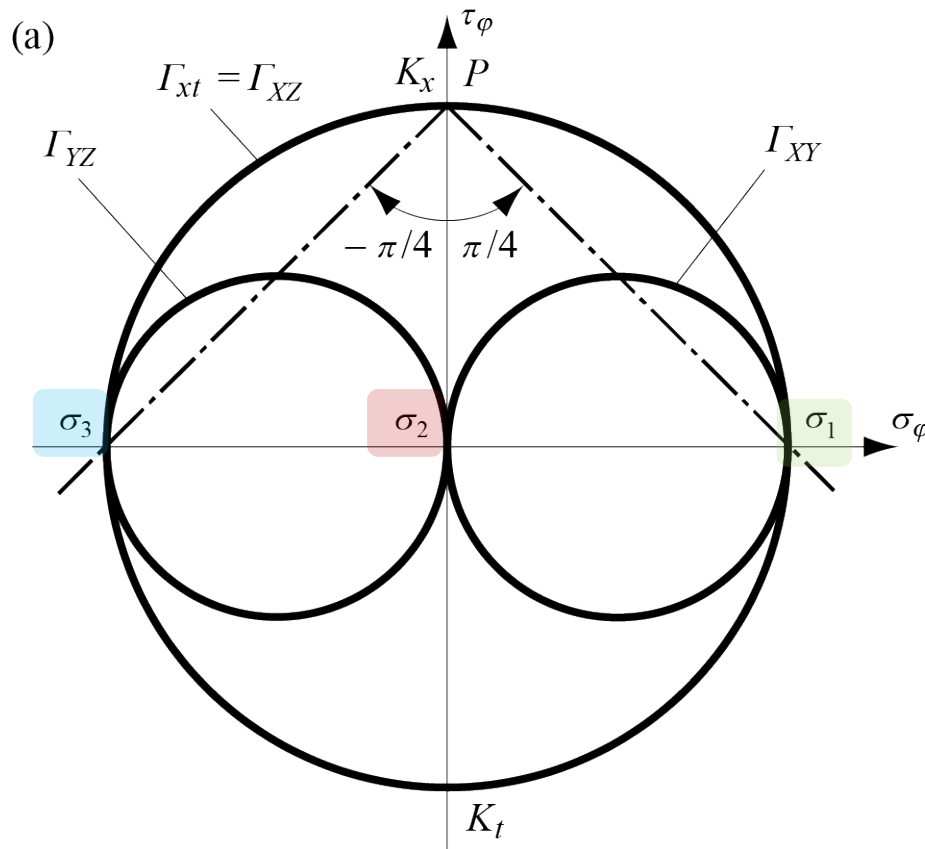
NOTE

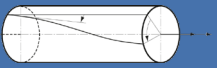


# Chapitre 5 : Torsion simple

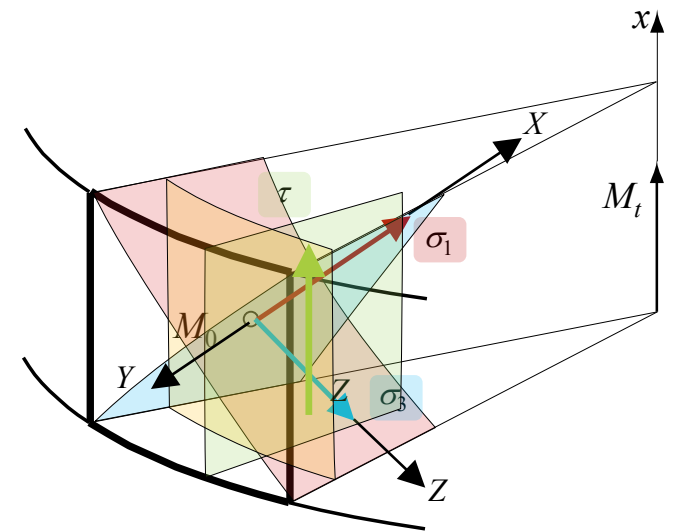
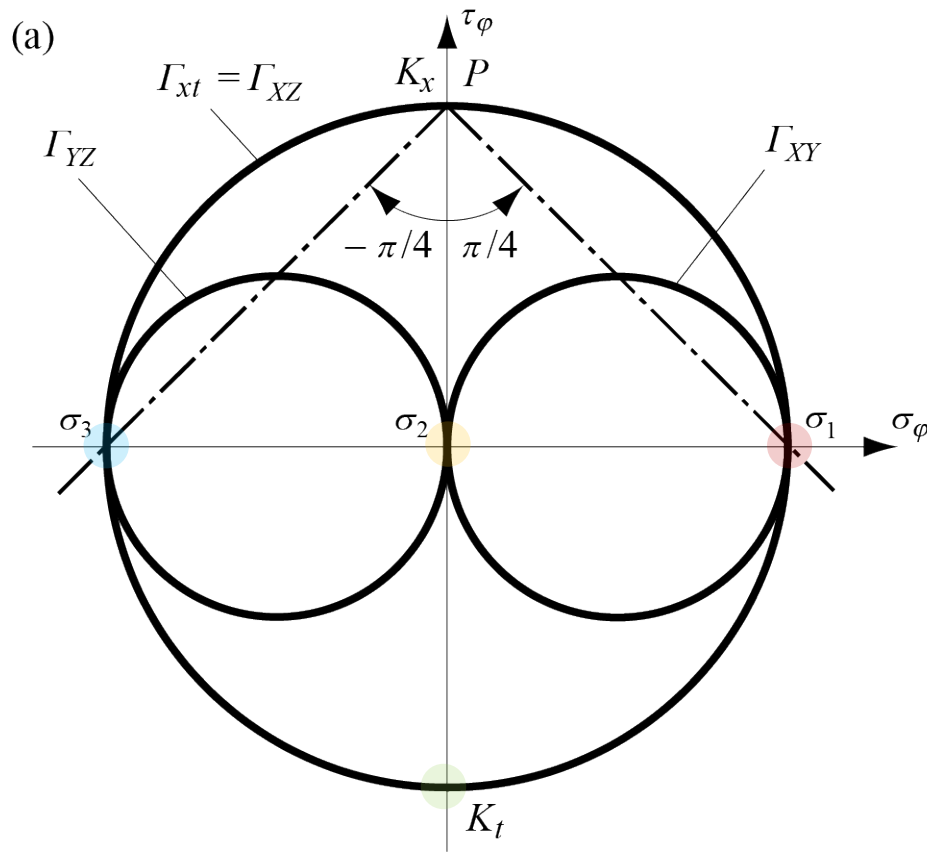
## Analyse de l'état de contrainte en torsion circulaire

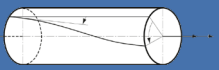
Torsion circulaire : (a) cercles de Mohr; (b) axes et plans principaux





# Chapitre 5 : Torsion simple

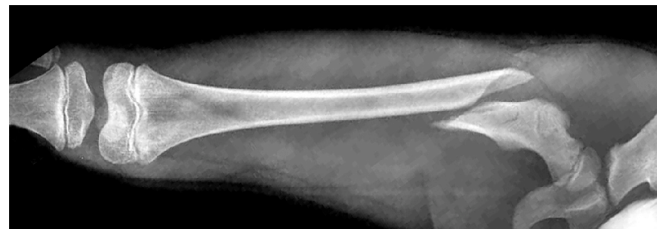
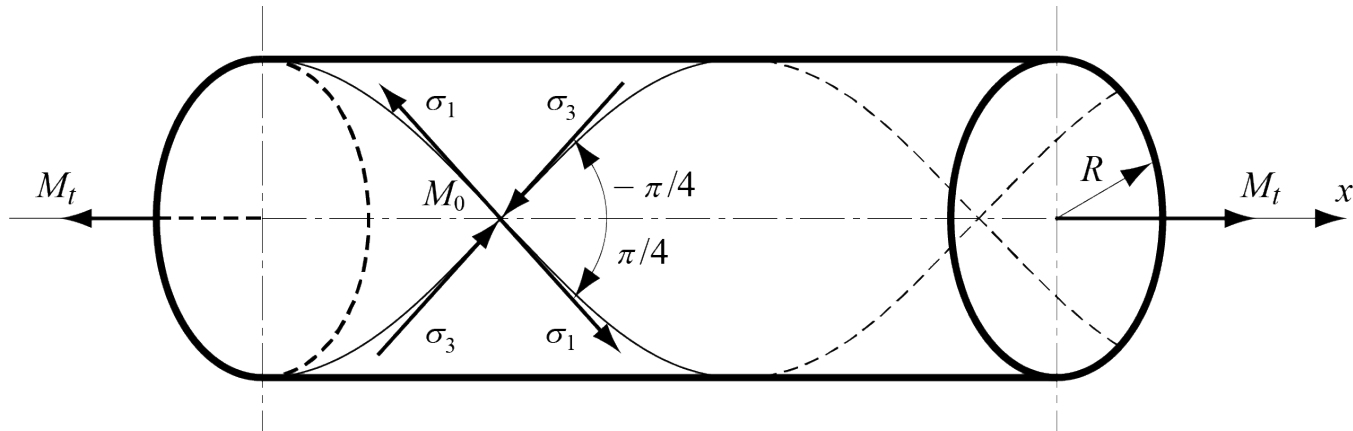


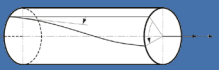


# Chapitre 5 : Torsion simple

## Ligne isostatique

A ce stade, il est intéressant d'observer les trajectoires des contraintes principales, c'est-à-dire les courbes de l'espace continuellement tangentes aux contraintes principales. Ces courbes, appelées *lignes isostatiques*, sont des hélices à  $45^\circ$  en torsion circulaire



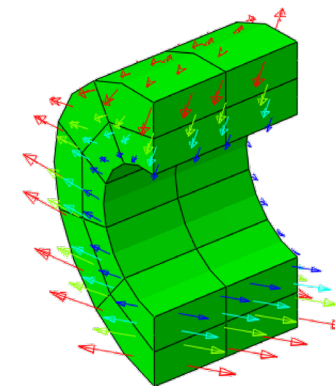
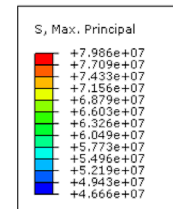
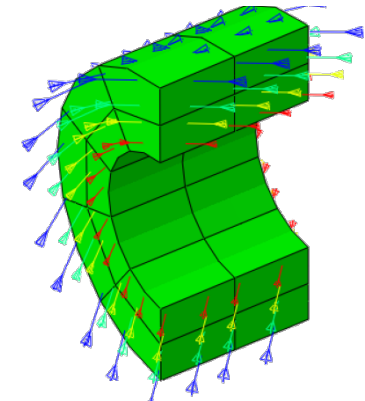
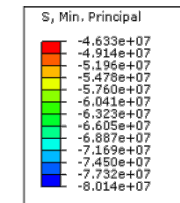
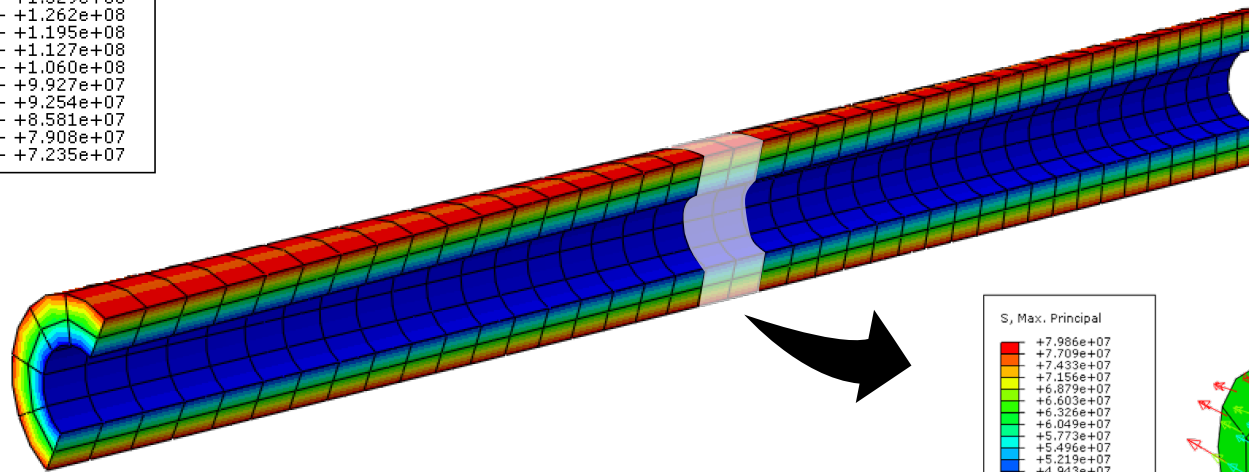
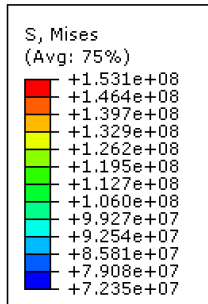
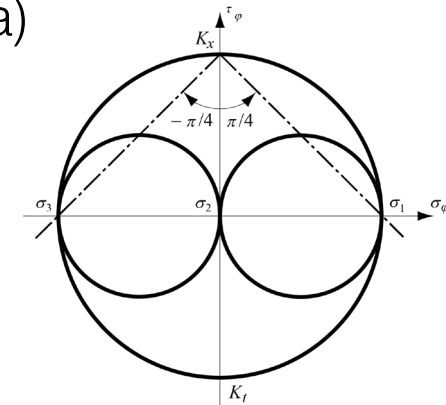


Module élastique du fémur : 10-20 GPa ( $\sigma_{\max} = 50-100$  MPa)

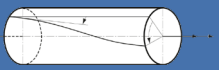
Moment de force : 1000 Nm  $\equiv$  100 kg à 1 m

Résistance de l'os : 100 N/mm<sup>2</sup> ou 100 MPa

Rayon :  $R = 20$  mm et  $r = 10$  mm

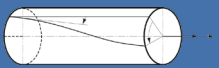


- $\tau(r) = \frac{r M_t}{I_p} = \frac{2 r M_t}{\pi(R^4 - r^4)} \cong 42.4$  MPa
- $\tau(R) = \frac{R M_t}{I_p} = \frac{2 R M_t}{\pi(R^4 - r^4)} \cong 84.8$  MPa



L'état de contrainte étant bidimensionnel, la variation relative de volume au premier ordre peut être obtenue grâce à la formule dans laquelle  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont les contraintes principales non nulles  $\sigma_1 = +\tau$  et  $\sigma_3 = -\tau$

- $$v = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{E} (1 - 2\mu) = \frac{\tau - \tau}{E} (1 - 2\mu) = 0$$



# Chapitre 5 : Torsion simple

## Densité d'énergie

La densité d'énergie  $u$  de déformation spécifique d'un barreau soumis au cisaillement pour la torsion a pour valeur (voir énergie de cisaillement ch. 4)

- $$u = \frac{\tau^2}{2G} = \left( \frac{\tau}{\tau_{max}} \right)^2 \frac{\tau_{max}^2}{2G} = \left( \frac{r}{R} \right)^2 u_{max}$$

$$\tau = k r = \frac{r M_t}{I_p}$$

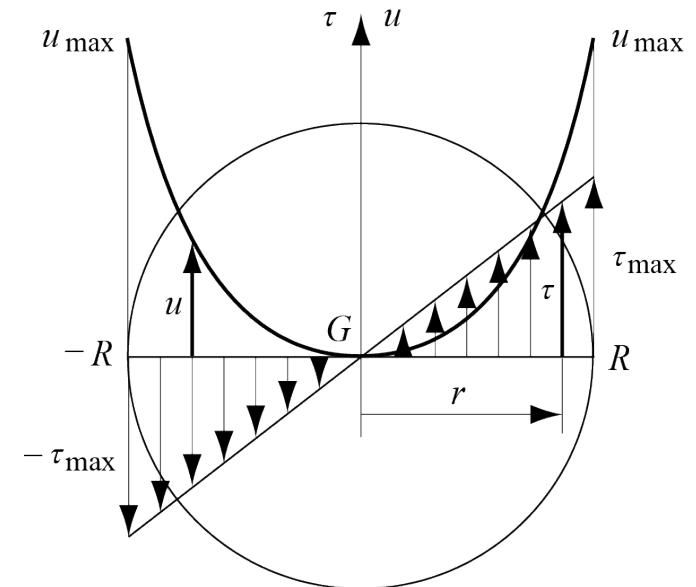
$$\tau_{max} = \tau(R) = \frac{R M_t}{I_p}$$

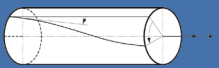
L'*énergie de déformation*  $dU$  comprise entre deux sections distantes de  $dx$  est égale au demi-produit du moment de torsion  $M_t$  par la rotation  $d\varphi$  d'une des sections par rapport à l'autre

- $$dU = \frac{1}{2} M_t d\varphi = \frac{M_t^2}{2G I_p} dx$$

$$d\varphi = \frac{M_t dx}{G I_p}$$

- $$U = \int_0^\ell dU = \int_0^\ell \frac{M_t^2}{2G I_p} dx = \frac{M_t^2 \ell}{2G I_p}$$

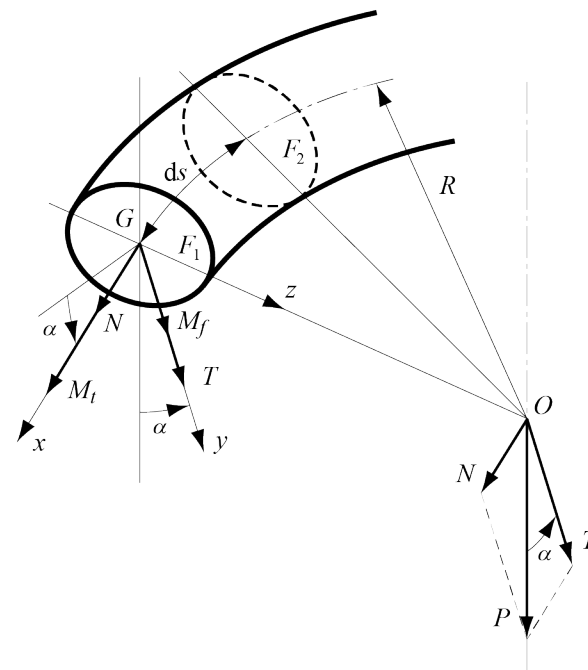
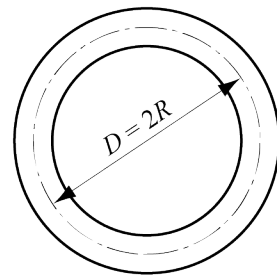
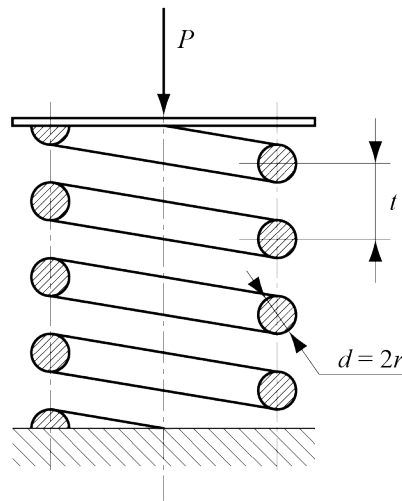




# Chapitre 5 : Torsion simple

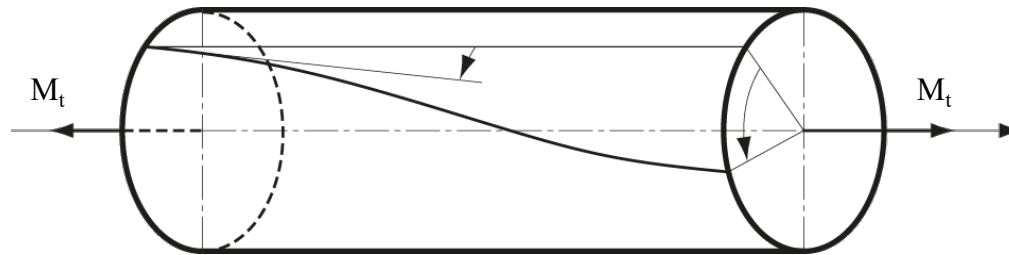
## Problème 5.2

Calculer la contrainte de cisaillement maximum dans un ressort hélicoïdal de diamètre  $D$ , formé de  $n$  spires de diamètre  $d$  et soumis à une charge de compression  $P$ . Déterminer ensuite la flèche, la constante du ressort et l'énergie emmagasinée.



NOTE

# Mécanique des structures

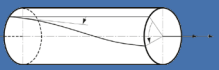


## Chapitre 5 : Torsion simple

Pr. Shea & Dr Preneloup  
SGM BA3 2025-2026

**EPFL**

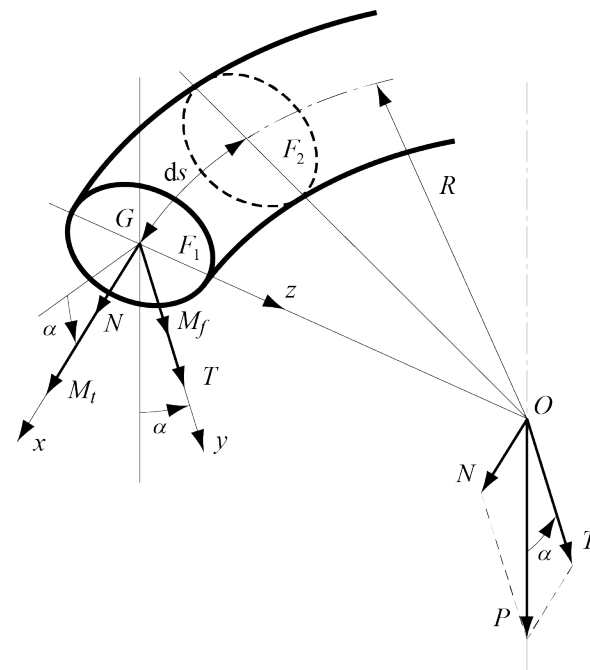
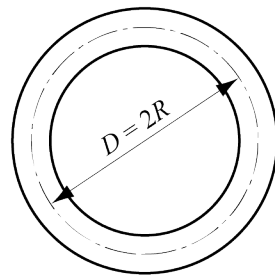
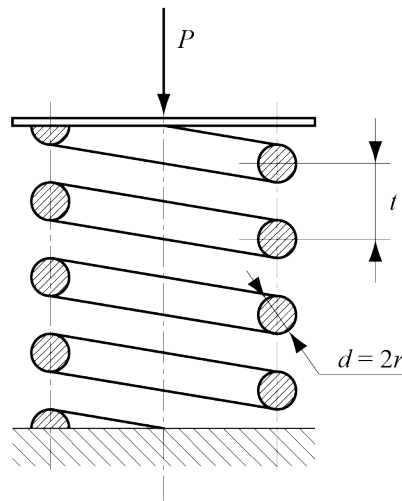




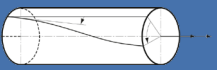
# Chapitre 5 : Torsion simple

## Problème 5.2

Calculer la contrainte de cisaillement maximum dans un ressort hélicoïdal de diamètre  $D$ , formé de  $n$  spires de diamètre  $d$  et soumis à une charge de compression  $P$ . Déterminer ensuite la flèche, la constante du ressort et l'énergie emmagasinée.

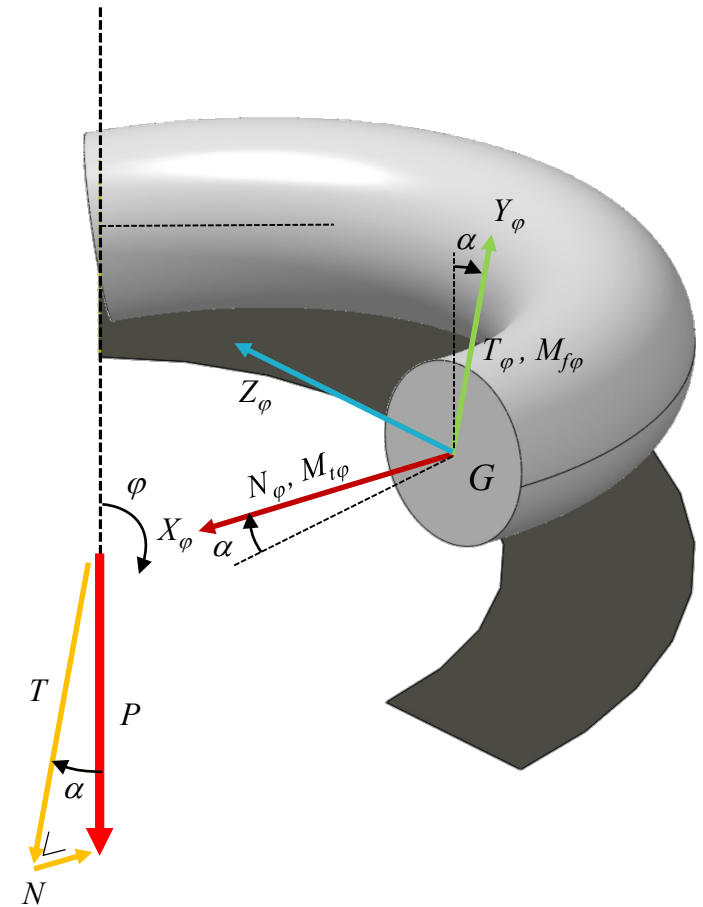


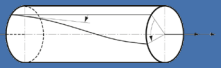
NOTE



# Chapitre 5 : Torsion simple

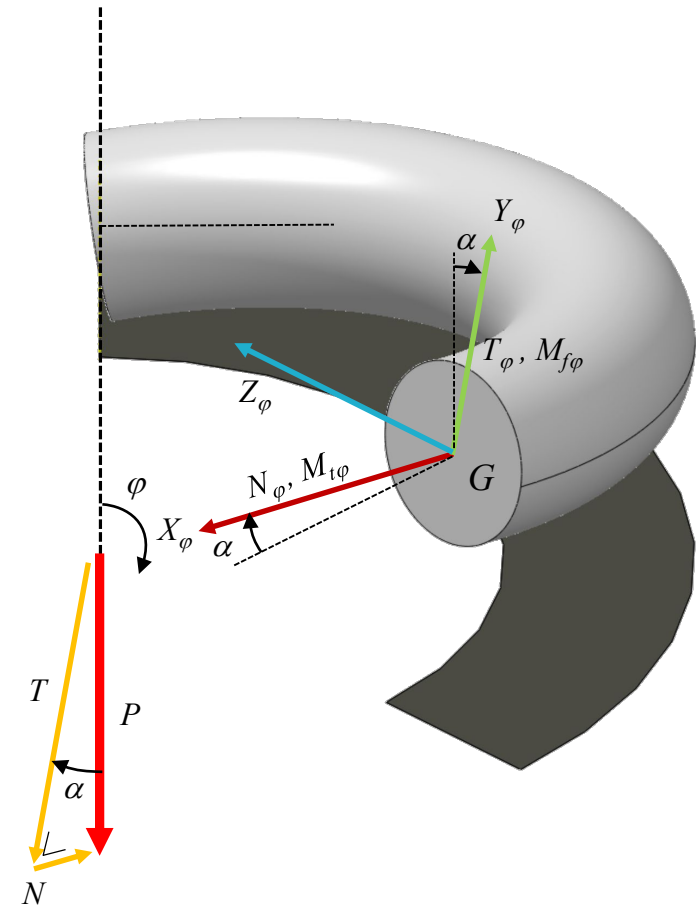
## Problème 5.2

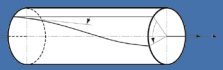




# Chapitre 5 : Torsion simple

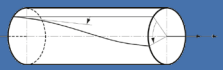
## Problème 5.2





# Chapitre 5 : Torsion simple

## Problème 5.2

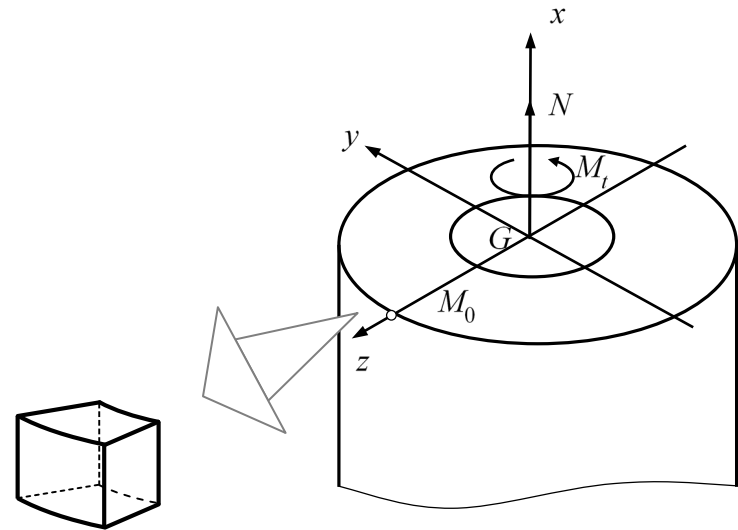


# Chapitre 5 : Torsion simple

## Problème 5.2

# Exemple

→ Equilibre des forces



# Exemple

# Exemple

# Exemple

# Annexe III Moment d'une aire plane

## Moment du second ordre

Les *moments du second* ordre d'une aire plane  $F$  du plan  $Oxy$ , constitués du *moment d'inertie polaire* par rapport à l'origine  $O$ , des *moments d'inertie* par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$ , ainsi que du *moment centrifuge*, sont définis par les expressions respectives

- $I_p = \iint_F r^2 dF$  [m<sup>4</sup>]
- $I_x = \iint_F y^2 dF$  [m<sup>4</sup>]
- $I_y = \iint_F x^2 dF$  [m<sup>4</sup>]
- $I_{xy} = \iint_F xy dF$  [m<sup>4</sup>]

où  $r$  dénote le module du vecteur-lieu  $\mathbf{r}$

Il est à relever qu'en vertu de la liaison géométrique  $r^2 = x^2 + y^2$ , le moment d'inertie polaire  $I_p$  est lié aux moments d'inertie  $I_x$  et  $I_y$  par la relation :  $I_p = I_x + I_y$



# Annexe III Moment d'une aire plane

## Moment du second ordre : surface rectangulaire

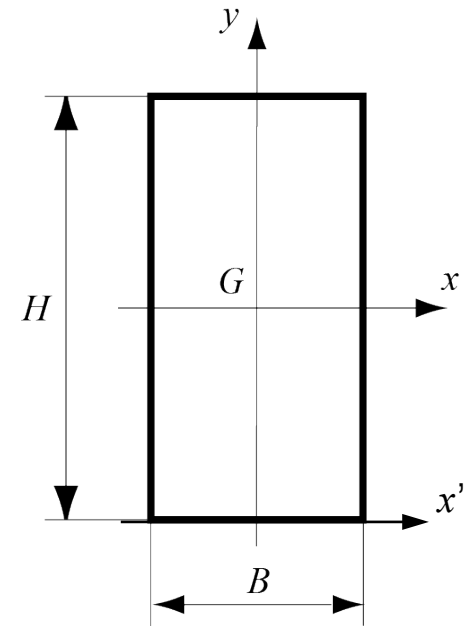
Le calcul par intégration du moment du second ordre d'un rectangle par rapport à l'axe  $x$  passant par le centre de gravité

- $$I_x = \iint_F y^2 dF = \int_{x=-B/2}^{B/2} \int_{y=-H/2}^{H/2} y^2 dF$$
$$= x \Big|_{-B/2}^{B/2} \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-H/2}^{H/2} = \frac{BH^3}{12}$$

- $$I_{x'} = \iint_F y^2 dF = \int_{x=-B/2}^{B/2} \int_{y=0}^H y^2 dF = \frac{BH^3}{3}$$

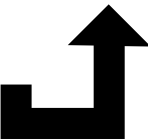
Approche discrète

- $$I_{x'} = I_x + \sum y^2 F = \frac{BH^3}{12} + \frac{H^2}{4} BH = \frac{BH^3}{3}$$



NOTE

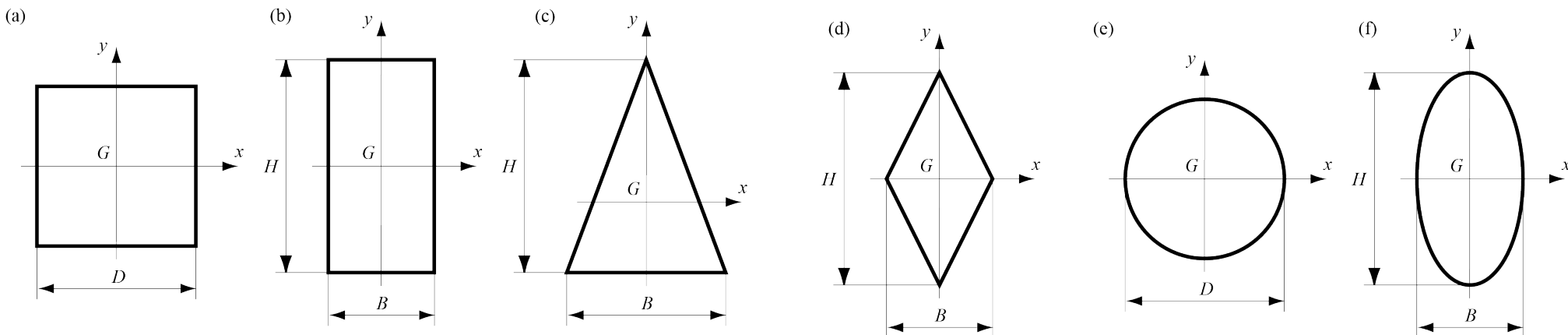
$I_x$



# Annexe III Moment d'une aire plane

## Moment du second ordre

Forme de l'aire	$I_p$ $m^4$	$I_x$ $m^4$	$I_y$ $m^4$	$I_{xy}$ $m^4$
(a) Carré de côté $D$	$\frac{D^4}{6}$	$\frac{D^4}{12}$	$\frac{D^4}{12}$	0
(b) Rectangle de largeur $B$ et hauteur $H$	$\frac{BH}{12}(B^2 + h^2)$	$\frac{BH^3}{12}$	$\frac{HB^3}{12}$	0
(c) Triangle isocèle de base $B$ et hauteur $H$	$\frac{BH}{144}(3B^2 + 4h^2)$	$\frac{BH^3}{36}$	$\frac{HB^3}{48}$	0
(d) Losange de diamètres $B$ et $H$	$\frac{BH}{48}(B^2 + h^2)$	$\frac{BH^3}{48}$	$\frac{HB^3}{48}$	0
(e) Cercle de diamètre $D$	$\frac{\pi D^4}{32}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	0
(f) Ellipse d'axes $B$ et $H$	$\frac{\pi BH}{64}(B^2 + h^2)$	$\frac{\pi BH^3}{64}$	$\frac{\pi HB^3}{64}$	0



# Annexe III Moment d'une aire plane

## Effet de translation des axes de coordonnées

En considérant la translation

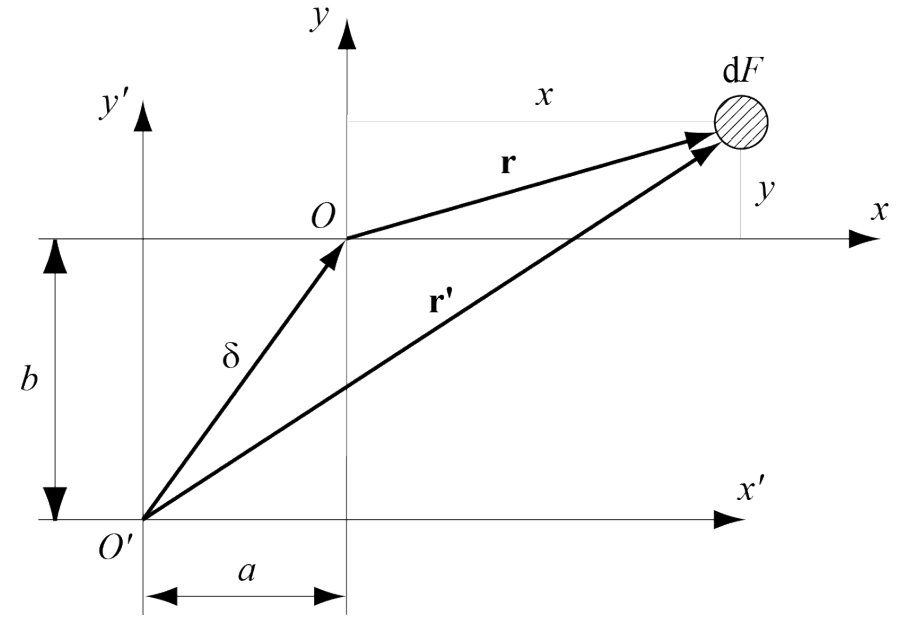
- $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}$
- $x' = x + a$
- $y' = y + b$

Par rapport au référentiel  $O'x'y'$ , les moments du second ordre ont pour expression

- $$I_{p'} = \iint_F r'^2 dF = \iint_F [(x + a)^2 + (y + b)^2] dF = I_p + 2(aS_x + bS_y) + \delta^2 F$$

Dans le cas particulier où le point  $O$  coïncide avec le centre de gravité  $G$

- $I_{p'} = I_p + \delta^2 F$
- $I_{x'} = I_x + b^2 F$
- $I_{y'} = I_y + a^2 F$



# Annexe III Moment d'une aire plane

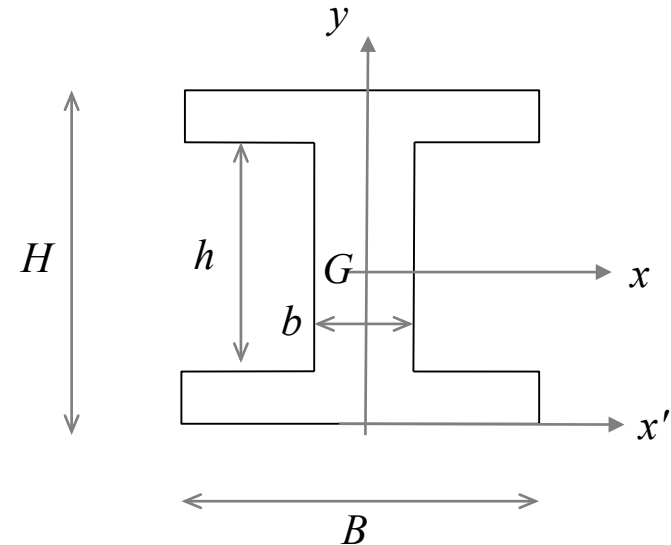
## Moment du second ordre : poutre en I

Forme intégrale du moment statique et du moment d'inertie

- $$S_{x'} = \int_{x'=-B/2}^{B/2} \int_{y=0}^H y \, dF - 2 \int_{b/2}^{B/2} \int_{(H-h)/2}^{(H-h)/2+h} y \, dF$$
$$= \frac{B H^2}{2} - \frac{H h (B-b)}{2} \quad [\text{m}^3]$$

- $$I_x = \int_{x=-B/2}^{B/2} \int_{y=-H/2}^{H/2} y^2 \, dF - 2 \int_{b/2}^{B/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \, dF$$
$$= \frac{B H^3}{12} - \frac{h^3 (B-b)}{12} \quad [\text{m}^4]$$

- $$I_{x'} = I_x + \sum y^2 F \quad [\text{m}^4]$$



**NOTE** 
$$I_p = I_x + I_y \quad [\text{m}^4]$$



# Annexe III Moment d'une aire plane

## Moment du second ordre : poutre en I

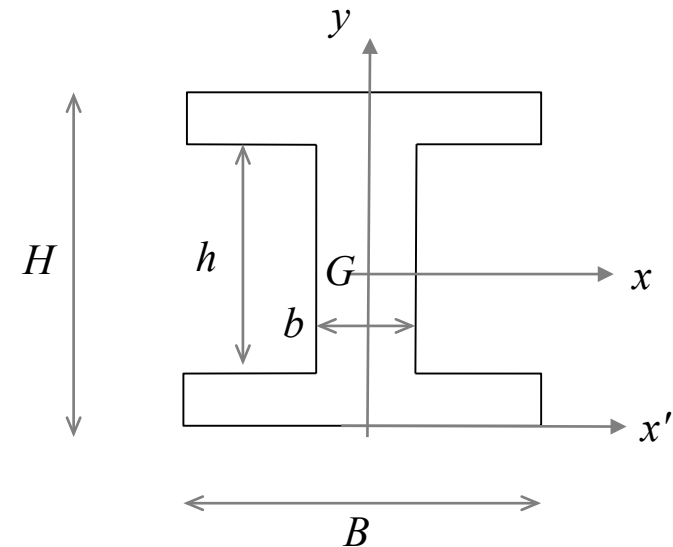
Calcul discret des moments statique et d'inertie (sommation des aires)

- $$S_{x'} = \sum y F = \frac{H}{2}BH - \frac{H}{2}h(B - b)$$
$$= \frac{BH^2}{2} - \frac{Hh(B-b)}{2} \quad [\text{m}^3]$$

- $$I_x = \frac{BH^3}{12} - \frac{(B-b)h^3}{12}$$

- $$I_{x'} = I_x + \sum y^2 F \quad [\text{m}^4]$$

- $$I_y = \frac{B^3H}{12} - \frac{h(B^3-b^3)}{12}$$



NOTE 
$$I_p = I_x + I_y \quad [\text{m}^4]$$

